複素積分とLagrangean多様体 (超曲面の特異点とb函数)

青本, 和彦

数理解析研究所講究録
225巻 1975年 292-297

複素積分と Lagrangean 多様体

青本和彦

§序　f を原点 0 で正則な n 変数 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ の函数とする. この時ベクトル場 grad Ref と $f=c$ (c は 0 に近い正数) の Cell 構造との関係について1つの問題を提出する.

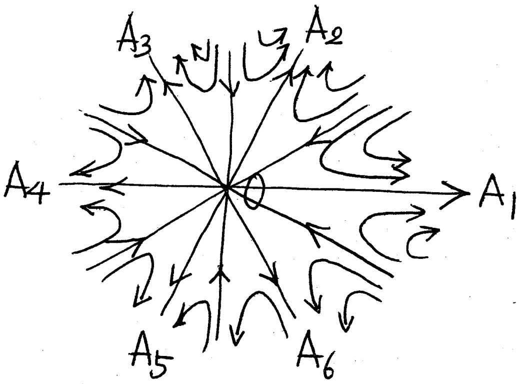
[問題] ベクトル場 $v=\operatorname{grad}\operatorname{Re}f$ の軌跡

$$\frac{dz_i}{dt}=\frac{1}{2}\overline{\frac{\partial f}{\partial z_i}}$$

で $t=-\infty$ のとき原点 0 に集積するものの全体を $\mathfrak{M}$ とおくとき $\mathfrak{M}$ は n 次元の CW-複体で且つ実際には Lagrangean 多様体片からなっているだろうか? $\mathfrak{M}\cap(f=c)$ は $f=c$ の Cell 構造を与えるだろうか?

<u>例1.</u> $n=1$ として $f=z^m$ とする

すると grad Ref の軌跡上では Imf は const. になる. 図示すれば



原点を通るものは $\arg z = \frac{k\pi}{m}$ ($k=0, 1, 2, 3, \cdots, 2m-1$) この中で $t=-\infty$ で0を極限点として持つものは $\arg z = \frac{k\pi}{m}$ ($k=0, 2, \cdots, 2m-2$) の m 個存在する.

<u>例2.</u> $f = z_1^{m_1} + z_2^{m_2} + \cdots + z_n^{m_n}$

$m_1, m_2, \cdots, m_n \geqq 1$, 整数 とすると

$\mathfrak{M}^-$ は 園睦雄, Brieskorn−Pham 氏によって得られた join をつくることに相当している. Lagrangean 多様体になることも明らかである.

これらの $\mathfrak{M}^-$ は 積分

$$\int e^{\lambda f(z)} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \qquad (\lambda \to +\infty)$$

の漸近展開の表示のすべてを与えることに相当している．事実 $f(z)$ が上記の例のような場合 $R = \mathbb{C}[z_1 \cdots z_n]$，$M = \Omega^1(R)$ として R 上の外微分形式 $\oplus \bigwedge^p M = \Omega^{\cdot}$ 上に次のように定義される De Rham hypercohomology $\mathbb{H}(\Omega^{\cdot})$

$$\nabla_\omega : \to \Omega^p \to \Omega^{p+1} \to$$

$$\omega = \lambda\, df$$

の rank に等しいだけの $\mathfrak{M}^-$ を構成出来る．

§2. 積分

$$\int f(z)^\lambda \, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

を考える但し $f(z)$ は多項式とする．ベクトル場 $v = \operatorname{grad} \log |f(z)|$ を考え こんどは

［仮定 I］ v の臨界点で $f(z) \neq 0$ となるものはすべて孤立しているとする．

このとき この孤立点達を $P_1, \cdots, P_M$ とすれば
各孤立点 P_i に対応して局所的に
得られる §1 の意味での Lagrangean
manifold 片 を $\mathcal{U}$ によって 全域に
接続する. これを $\mathfrak{M}_{i1}, \cdots, \mathfrak{M}_{i\mu_i}$
$(1 \leq i \leq N)$ とおくとき これらは $\mathfrak{M}$ 対
$\mathbb{C}^n, (f=0)$ の 相対 cycle を与える
ことになるが これが 次の hypercohomology
の~~双対~~基底を与えることになるであろうか?
すなわち $\omega = \frac{df}{f}$ とおき R を有理
函数で $f=0$ にのみ極を持つものの
全体とする. R 上の 微分形式 環
$\Omega^{\cdot}$ に対して De Rham cohomology
$\mathbb{H}(\Omega^{\cdot})$

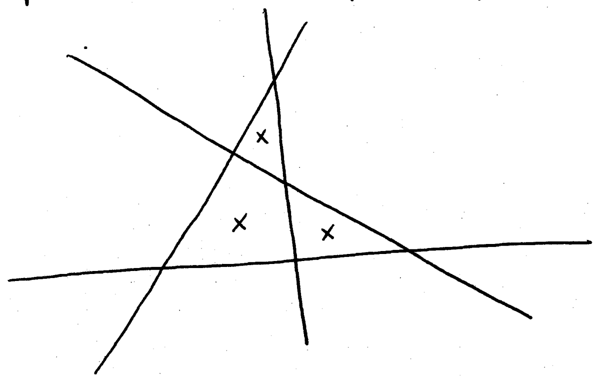
$$\left(\nabla_\omega : \to \Omega^p(R) \to \Omega^{p+1}(R) \to \atop \varphi \to d\varphi + \lambda \frac{df}{f} \wedge \varphi \right)$$

を考える. 漸近展開 $(\lambda \to \infty)$ は 各
$\mathfrak{M}_{jk}$ に対応して 1つずつ 存在する
であろうか?

例.3 積分 （$f_1, \cdots, f_m$ real とする）

$$\int f_1^{\lambda_1}\cdots f_m^{\lambda_m}\,\varphi\, dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$$

を考える. ここで $f_1,\cdots,f_m$ を線型とする. φ は $(f_1=0)\cup\cdots\cup(f_m)$ でのみ極を持つ有理函数とする. $\lambda_j=\lambda_j^0+n_j b$ ($n_j>0$ 整数) とおいて $f=f_1^{n_1}f_2^{n_2}\cdots f_m^{n_m}$ とおくとき grad log$|f|$ の臨界点はすべて実であってしかも $\mathbb{R}^n$ を壁 $\mathrm{Re} f_j=0$ で仕切られた部屋で compact なものの中にのみ存在する.



今臨界点がすべて non-degenerate とすれば $\mathfrak{M}_j$ は compact な部屋そのものである. 従って $H^n(\mathring{\Omega})$ の双対基底を与える.

文献 J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces
A. Weinstein, Normal modes for nonlinear Hamiltonian Systems
K. AOMOTO On vanishing of cohomology attached to certain multiplicative meromorphic functions